

19/04 Модель развития популяции.

Кристинская численность

$x(t)$  — численность популяции,  $x$



изм-ся во времени. Коэфф-т разлнот-а по-  
пуляции  $= \alpha$ , т.е. относит. прирост популя-  
ции пропорционален изм-нию времени  
 $\frac{\Delta x}{x} = \alpha \Delta t$ .

Откуда получаем простейшую модель  
развития популяции  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x(t), t > 0, \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$

В рез-те имеем экспоненц. рост по-  
пуляции при  $\alpha > 0$ :  $x(t) = x_0 e^{\alpha t}, t \geq 0 \quad (2)$

Этот случай не отражает реал. си-  
туации, т.к. не учитывает изм-ние  
коэфф-та разлнот-а при изм-нии чис-  
ленности популяции. Необходимо  
учесть 2 основн. момента:

1) П.к. коэфф-т разлнот-а вычисл-ся  
как разность и/коэфф-том рождаемости  
 $\alpha_n$  и коэфф-том смерт-ти  $\alpha_s$  ( $\alpha = \alpha_n - \alpha_s$ ). Это означает, что  $\exists$  такая кри-  
тич. численность  $x^{(k)}$ , при  $x$  все-во рат



данных уровней = равн-е, тождеств (от ес-теств. свойств, критер. катастроф и эшеников), т.е.  $\alpha_p: x^{(k)} = \alpha_c \cdot x^{(k)}$ . В этом случае  $\alpha = 0$ . Поэтому можно считать, что  $\alpha = \frac{x(t) - x^{(k)}}{x(t)} \cdot \alpha_0 \Rightarrow$  модель

(1) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_0 (x(t) - x^{(k)}), & t > 0, x^{(k)} = \text{const}, \\ x(t=0) = \dot{x}. \end{cases} \quad (3)$$

Реш-е зад. (3) при  $\alpha_0 = \text{const}$  имеет вид:  $x(t) = x^{(k)} + (\dot{x} - x^{(k)}) e^{\alpha_0 t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  (4)

If  $\dot{x} > x^{(k)}$ , т.е. начал. численность выше критич-й, то числен-ть популяции экспоненциально возрастает. If  $\dot{x} < x^{(k)}$ , то числен-ть экспоненциально убывает и  $\exists$  критич. время  $t_k$ , при  $\alpha$   $x(t_k) = 0$ , а при  $t \geq t_k$   $x(t) \equiv 0$ . Критич. время легко вычисл-ся из усл-я  $x^{(k)} + (\dot{x} - x^{(k)}) e^{\alpha_0 t_k} = 0$ , откуда имеем  $t_k = \frac{1}{\alpha_0} \ln \frac{x^{(k)}}{\dot{x} - x^{(k)}}$ ,  $0 < \dot{x} < x^{(k)}$  (5)

2) Экспоненц. рост числен-ти при



$\dot{x} > x^{(*)}$  связан с тем, что в модели не учитывается ограниченность ресурсов потребляемых популяций. Например, это объем корма, потребляемого популяцией. Если ареал распространения популяции может прокормить популяцию численностью  $x^s$ , то при  $x(t) > x^s$  коэффициент размножения  $\alpha$  должен становиться отрицат., чтобы численность популяции уменьшилась. В результате получаем  $\alpha_0 = k(x^s - x(t))$  (6)

Подставив (6) в (3), получим математ. модель в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(x^s - x(t))(x(t) - x^{(*)}), t > 0, \\ x^s > x^{(*)}, k > 0, \\ x(t=0) = \dot{x} \end{cases} \quad (7)$$

В этой модели учтено как влияние на коэффициент рождаемости нехватки ресурсов, так и наличие критич. численности популяции.

Велич. уравн. (7) описывает, как популяция



нуль с-му, где  $\hat{x}$  — мин. значение  $x(t)$ .  
 от  $x(t)$ . Эта с-ма имеет 2 т. равновесия:  
 $x(t) = x^s$  и  $x(t) = x^{(k)}$ . Д/исследования  
 устойчи-ти перейдем к лнн. ур-нию, пре-  
 небывая членом  $x^2(t)$ . Тогда в окрест-ти  
 т.  $x(t) = x^s$  имеем  $y = x(t) - x^s \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -ky(y + x^s - x^{(k)}) \approx -k(x^s - x^{(k)})y \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  имеем асимпт. устойчи-ть.

В окрест-ти т.  $x(t) = x^{(k)}$  имеем  $y = x(t) - x^{(k)} \Rightarrow$   
 $\frac{dy}{dt} = ky(x^s - x^{(k)} - y) \approx k(x^s - x^{(k)})y \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  имеем неустойч. т. равновесия

При  $k = \text{const}$  зад. (7) имеет аналит.  
 реш. Д/этого перепишем ур-ние (7):

$$\frac{dx}{(x(t) - x^s)(x(t) - x^{(k)})} = -k dt \quad \text{или}$$

$$\frac{dx}{x(t) - x^s} - \frac{dx}{x(t) - x^{(k)}} = -k(x^s - x^{(k)}) dt, \quad t \in [0, t]$$

Пропинтегрировав<sup>+</sup> учитывая нач. усл-я  
 $x^s > x^{(k)}$  и  $x^0 > x^{(k)}$ :  $\ln \frac{x(t) - x^s}{x(t) - x^{(k)}} - \ln \frac{x^0 - x^s}{x^0 - x^{(k)}} =$   
 $= -k(x^s - x^{(k)})t \Leftrightarrow$



$$\Leftrightarrow \frac{x(t) - x^s}{x(t) - x^{(k)}} = \frac{x^0 - x^s}{x^0 - x^{(k)}} e^{-k(x^s - x^{(k)})t} \quad (8)$$

Внедрив из (8)  $x(t)$ , получим оконча-  
тельно:  $x(t) = \frac{x^s - x^{(k)} q}{1 - q}$ , где  $q = \frac{x^s - x^0}{x^{(k)} - x^0} e^{-k(x^s - x^{(k)})t}$  (9)

Отметим, что при  $t \rightarrow \infty$ , имеем  
 $q \rightarrow 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow x^s$ , т.е. реш-е асимптотич.  
переходит в т. равновесия

Исследуем  $x(t)$  на возрастание и убы-  
вание.

$$x'(t) = \frac{x^s - x^{(k)}}{(1 - q)^2} \cdot q'(t)$$

П.к.  $x^s > x^{(k)}$ , то знак  $x'(t)$  совпадает со  
знаком  $q'(t)$ . Тогда, if  $\dot{x} > x^s > x^{(k)}$ , то  $q(t) < 0$   
 $\Rightarrow x'(t) < 0 \Rightarrow x(t)$  монотонно убывает

от  $\dot{x}$  к  $x^s$ . If  $x^s > \dot{x} > x^{(k)}$ , то  $q'(t) > 0 \Rightarrow x'(t) > 0$   
 $\Rightarrow x(t)$  монотонно возрастает от  $\dot{x}$  к  $x^s$

≠ теперь случай, когда началь. числен-  
ность популяции < критич.-й, т.е.  $\dot{x} < x^{(k)}$

Тогда, согласно (9),  $q(t=0) = \frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}} > 1$ , т.к.  
 $x^s > x^{(k)}$ . При возрастании времени  $t$  вели-



функция  $q$  убывает  $\Rightarrow \exists t_0$ , при  $d \ q(t_0) = 1$  и  $x(t) \rightarrow -\infty$ , согласно (9).

$$t_0 = \frac{1}{k(x^s - x^{(k)})} \ln \frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}}$$

Однако  $\exists$  критическое время  $t_k < t_0$ , при  $d \ x^s \in x^{(k)}$ .  $q = 0$ , т.е. численность популяции обнуляется в 0. Определим это время из усл-я:  $q = \frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}} e^{-k(x^s - x^{(k)})t} = \frac{x^s}{x^{(k)}}$

В рез-те получаем  $t_k = \frac{1}{k(x^s - x^{(k)})} \ln \frac{(x^s - \dot{x})x^{(k)}}{(x^{(k)} - \dot{x})x^s}$  (10)

Заметим, что  $\frac{(x^s - \dot{x})x^{(k)}}{(x^{(k)} - \dot{x})x^s} > 1$ , т.к.  $(x^s - \dot{x})x^{(k)} - (x^{(k)} - \dot{x})x^s = \dot{x}^0 (x^s - x^{(k)}) > 0 \Rightarrow t_k > 0$

Покажем, что критическое время  $t_k$

$< t_0$ :  $t_k \vee t_0 \Leftrightarrow \frac{1}{k(x^s - x^{(k)})} \ln \frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}} \vee \frac{1}{k(x^s - x^{(k)})}$

$\cdot \ln \frac{(x^s - \dot{x})x^{(k)}}{(x^{(k)} - \dot{x})x^s}$

т.к.  $k(x^s - x^{(k)}) > 0$ , то  $\frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}} \vee \frac{(x^s - \dot{x})x^{(k)}}{(x^{(k)} - \dot{x})x^s}$

т.к.  $\frac{x^s - \dot{x}}{x^{(k)} - \dot{x}} > 0$ , то  $x^s \vee x^{(k)}$ . т.к.  $x^s > x^{(k)}$ , то  $t_0 > t_k$ .



## Учет влияния миграции на развитие популяции

В единицу времени в ареал распространения популяции мигрирует  $f(t)$  особей. Тогда ур-ние (1) примет вид:

$$\left[ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k \cdot x(t) + f(t), \quad t > 0, \quad k > 0, \\ x(t=0) &= x_0 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Решение этой зад. легко нах-ся введением постоянной:  $x(t) = C(t)e^{kt}$ ,  $C(t=0) = x_0$  (12)

Подставив это реш-е в (11), получим  $C'(t)e^{kt} + kC(t)e^{kt} = kC(t)e^{kt} + f(t)$ ,

$$\frac{dC}{dt} = f(t)e^{-kt}, \quad \Leftrightarrow \quad C(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau)e^{-k\tau} d\tau$$

$$C(t=0) = x_0$$

Подставив получ.  $C(t)$  в (12), получим реш-е  $x(t) = x_0 e^{kt} + \int_0^t f(\tau)e^{k(t-\tau)} d\tau$  (13)

Получаем экспоненц. рост, что негра-  
вильно, т.к. не учтен фактор ограниче-  
ния ресурсов в ареале распростр-а популя-



дим. ] Пусть мы ищем ту величину, извест-  
 ную как противление популяции числен-тью  
 $x^s$ . Величина  $x^s, x^{(k)}$  явл-ся предельной  
 численн-тью популяции. Коэфф-т раз-  
 мнот-я популяции  $k$  уменьшается при  
 $x(t) \rightarrow x^s$ , также уменьш-ся потск ими-  
 грации. Д/учета этих усл-й введем  
 $kx(t) = k_0(x^s - x(t)), k_0 > 0, f = \frac{x^s - x(t)}{x^s} \cdot f_0(t) \quad (14)$

Подставив (14) в (11), получим новую  
 модель учета влияния иммиграции на  
 динамику популяции:

$$\left[ \frac{dx}{dt} = k_0(x^s - x(t)) + \frac{x^s - x(t)}{x^s} f_0(t), t > 0, \quad (15) \right]$$

$$x(t=0) = \tilde{x} < x^s$$

Реш-е этой зад. опред-ся аналитически

$$\left[ \frac{dx}{x^s - x(t)} = \left( k_0 + \frac{f_0(t)}{x^s} \right) dt, \right]$$

$$x(t=0) = \tilde{x} < x^s$$

Интегрировав от 0 до  $t$ , получим:

$$\ln \frac{x^s - x(t)}{x^s - \tilde{x}} = - \int_0^t \left( k_0 + \frac{f_0(t)}{x^s} \right) dt$$



Итак, имеем рекур-е в виде:  $\underline{x(t) = x^s - (x^s - \dot{x})e^{-q(t)}, t \geq 0, (16)}$  где  $q(t) = k_0 t +$   
 $+ \frac{1}{x^s} \int_0^t f_0(\tau) d\tau, q(t=0)=0, q(t) \geq 0 (17)$

Легко видеть, что при  $t=0$   $x(0)=\dot{x}$ , и  $x(t)$  возрастает, стремясь к предельной чер-те  $x^s$ . При этом уровень, против-  
 вания популяции падает от величины  $\frac{Q}{\dot{x}}$  до  $\frac{Q}{x^s}$ , где  $Q$  - общее кол-во ресурсов в ареале.